INITIATION A LA PRATIQUE DE L'ELECTRONIQUE

LE DIAGRAMME DE KARNAUGH

Ce mois-ci, nous allons développer et appliquer les points suivants : La forme canonique met en évidence toutes les combinaisons de variables d'une expression logique. Le diagramme de Karnaugh est utilisé pour la simplification d'expressions booléennes. Il comporte autant de cases que de termes dans la forme canonique de l'expression logique considérée. Chacune des cases correspond à une ligne de la table de vérité. On inscrit « 1 » dans les cases correspondantes. On détermine les groupements les plus importants de cases adjacentes qui peuvent être inscrites par le plus petit nombre de variables. Le diagramme de Karnaugh peut être utilisé si le nombre de variables est inférieur ou égal à huit.

Forme canonique d'une fonction logique

Ce terme de « forme canonique » peut sembler à certains un peu rébarbatif, mais parler de forme canonique rend l'introduction aux diagrammes de Karnaugh plus aisée.

Nous savons que lorsqu'il existe deux variables (A, B) dans une expression logique, nous avons 2^2, soit quatre possibilités de combinaisons entre ces deux variables. S'il y apparaît trois variables (A, B, C), huit combinaisons (2^3) sont possibles. Ceci se traduit par la formule : $X = 2^n$.

Toutes ces possibilités de combinaisons sont d'ailleurs inscrites dans la table de vérité. Dans le cas de deux variables, la table de vérité comporte quatre lignes qui correspondent à : $\bar{A}\bar{B}$, $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, AB, soit la forme canonique : $X(A,B) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B} + AB$. Suivant la fonction réalisée, un ou plusieurs termes de cette expression ont pour valeur zéro. Ainsi, si dans l'expression X (A, B) nous avons AB = 0, la fonction réalisée est un NAND.

Donc, en résumé, la forme canonique d'une fonction de deux variables se compose de quatre termes. Pour trois variables, la forme canonique possède huit termes, etc.

Comme nous allons le voir maintenant, le diagramme de Karnaugh comporte autant de carrés que de termes dans la forme canonique, chaque carré pouvant prendre la valeur « 1 » ou « 0 ».

Diagramme de Karnaugh

C'est l'ensemble des états d'un système présenté sous forme de tableau composé de cases, de telle sorte que chaque case ne diffère de sa voisine que par une seule variable logique.

Il s'agit d'une méthode graphique utilisée pour simplifier les expressions booléennes. Elle permet une simplification plus rapide que la méthode graphique exposée le mois dernier.

	A	B	X
(1)	0	0	
(2)	0	1	
(3)	1	0	
(4)	1	1	

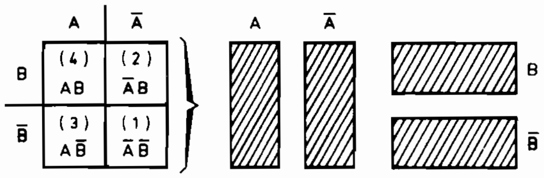


FIGURE 1
Le diagramme de Karnaugh [illegible]
dans la table de vérité

	A	B	X
(1)	0	0	0
(2)	0	1	1
(3)	1	0	1
(4)	1	1	1

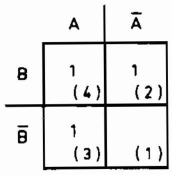


FIGURE 2
Table de vérité
et diagramme de Karnaugh
d'un opérateur OU.

Commençons par une fonction de deux variables. Le diagramme se compose de quatre cases rangées en deux colonnes (celles de A et $\bar{A}$) et deux lignes (celles de B et $\bar{B}$). L'intersection des colonnes et des lignes nous donne quatre cases que nous représentons sur la figure 1 côte-à-côte avec une table de vérité. La première ligne de la table de vérité (A = 0, B = 0) correspond à la case située en bas à droite ($\bar{A}\bar{B}$), la deuxième ligne (A = 0, B = 1) à la case au-dessus ($\bar{A}B$), etc. L'ensemble des quatre cases correspond bien à la forme canonique déjà donnée, dans laquelle chaque terme peut avoir la valeur 1 ou 0.

Pour un opérateur OU, seul le terme $\bar{A}\bar{B}$ disparaît, et X est égal à :

$$\bar{A}B + A\bar{B} + AB$$

correspondant respectivement aux cases (2), (3) et (4). Voir figure 2. Pour plus de clarté, les « 0 » ne sont pas représentés sur le diagramme.

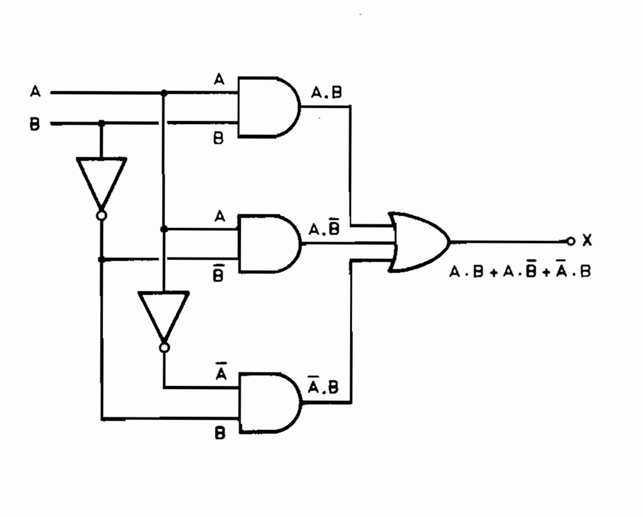


FIGURE 3. – Exemple de schéma à simplifier par la méthode de Karnaugh.

Simplification graphique

Passons maintenant à l'utilisation de la méthode de Karnaugh, et pour cela nous prendrons le schéma de la figure 3. Nous voyons que l'équation logique du système est :

$$X = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + AB$$

Le diagramme de Karnaugh sera rempli comme indiqué sur la figure 4a en mettant un « 1 » dans les cases correspondant à $\bar{A}\bar{B}$, $A\bar{B}$ et AB. En examinant le diagramme, on localise les carrés adjacents remplis par « 1 » et on remarque que nous obtenons deux groupes (fig. 4b) : l'un ayant la valeur A (groupe vertical de gauche) et l'autre la valeur $\bar{B}$ (groupe horizontal du bas), ces deux groupes nous donnent $A + \bar{B}$, expression simplifiée de $\bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + AB$. Ainsi le schéma initial comportant six portes se réduit à un schéma constitué d'un inverseur et d'un OU (fig. 4c).

Evidemment cette simplification aurait pu être faite de façon algébrique, mais elle aurait été plus longue. En mettant $\bar{B}$ en facteur, l'expression devient $\bar{B}(\bar{A} + A) + AB$. Sachant que $\bar{A} + A = 1$, nous obtenons $\bar{B} + AB$, expression identique à une relation donnée le mois dernier et très utile à connaître lorsqu'on manipule l'algèbre de Boole : $(A + \bar{A}B = A + B)$. Notre équation $\bar{B} + AB$ se transforme alors en $\bar{B} + A$, ce qui est bien ce que nous avons trouvé par la méthode de Karnaugh.

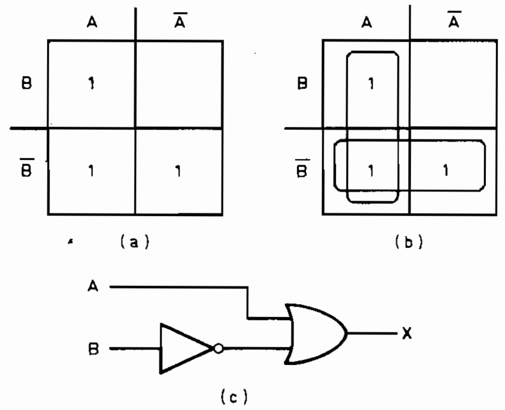


FIGURE 4. – Diagramme de Karnaugh correspondant au schéma de la figure 3. Le schéma définitif ne comporte plus que deux éléments.

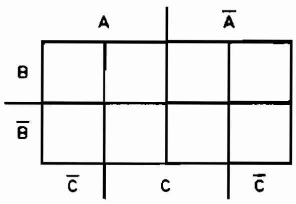


FIGURE 5. Diagramme pour trois variables.

On aurait pu également commencer la simplification en mettant A en facteur, ce qui aurait, bien sûr, mené au même résultat.

Fonction à trois variables

Si nous avons trois variables (A, B, C), le diagramme se compose de huit cases (= 3^2) comme sur la figure 5. Prenons, à titre d'exemple, l'équation logique inscrite dans la table de vérité de la figure 6a. Un « 1 » apparaissant cinq fois dans la colonne X, cinq cases du tableau de Karnaugh devront être remplies (fig. 6b).

Nous voyons qu'il est possible de regrouper les quatre cases du centre, ces cases correspondent à C. Sur la ligne supérieure, les trois cases peuvent former un groupe, mais deux d'entre elles sont déjà englobées dans le groupe « C ». Il ne resterait qu'à s'occuper de la case à l'extrême droite, représentant $\bar{A}B\bar{C}$. Pour simplifier, nous regroupons ensemble les cases des lignes 3 et 4 de la table de vérité, comme indiqué sur la figure 6b ; la valeur de ce regroupement est $\bar{A}$ B. L'expression qui comportait cinq termes au départ devient, après simplification : $X = \bar{A}B + C$.

Fonction à quatre variables

Pour quatre variables, le diagramme se présente comme sur la figure 7.

Le diagramme de Karnaugh peut être utilisé si le nombre de variables est inférieur ou égal à huit. Au-delà, le procédé se complique.

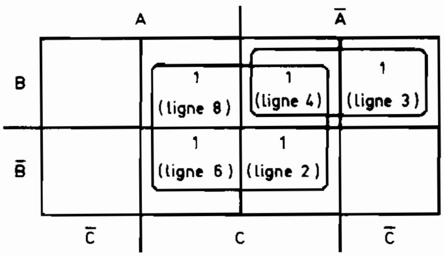
Nous donnons comme exemple le cas d'un décodeur (partie droite de la figure 8) dans lequel sont implantées quatre bascules A, B, C et D . A la sortie de celles-ci, on doit avoir un signal binaire de 1 chaque fois que le compteur se trouve dans les positions 1, 5, 8, 9, 12 et 13. Le signal est 0 dans les autres positions.

La marche à suivre est de tracer la table de vérité d'où on va tirer l'expression booléenne :

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D \text{ (fig. 9).}$$

	A	B	C	X
(1)	0	0	0	0
(2)	0	0	1	1
(3)	0	1	0	1
(4)	0	1	1	1
(5)	1	0	0	0
(6)	1	0	1	1
(7)	1	1	0	0
(8)	1	1	1	1

(a)



(b)

FIGURE 6. – Exemple d'utilisation du diagramme de Karnaugh. Les cases sont regroupées en deux groupes.

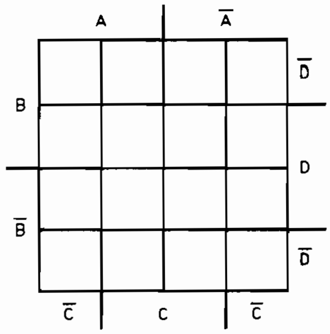


FIGURE 7. – Diagramme de Karnaugh pour quatre variables.

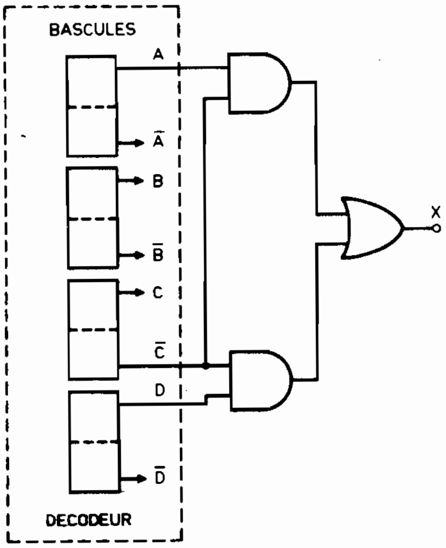


FIGURE 8. – Exemple d'application du diagramme de Karnaugh.

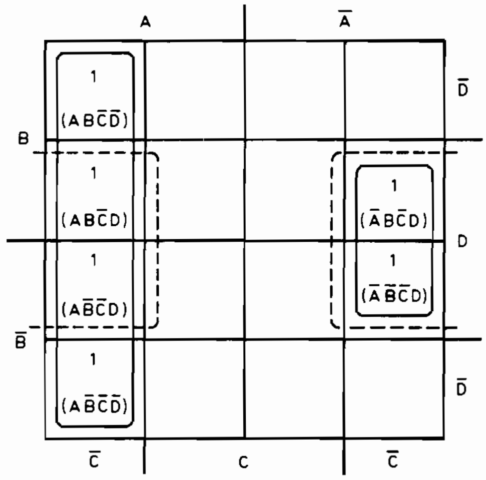


FIGURE 10. – Diagramme de Karnaugh du circuit du décodeur.

Ces six termes seront portés dans le tableau de Karnaugh comme cela est montré sur la figure 10. Les quatre carrés de gauche représentent $A\bar{C}$, et les deux de droite $\bar{A}\bar{C}D$. En réalité, ces deux cases sont adjacentes aux cases représentant les termes $AB\bar{C}D$ et $A\bar{B}\bar{C}D$, parce qu'on imagine le diagramme enroulé autour d'un cylindre (fig. 11). On obtient ainsi un groupe de quatre cases dessiné en pointillé sur le diagramme et dont la valeur est $\bar{C}D$.

En conclusion, la fonction devient $X = A\bar{C} + \bar{C}D$, et le circuit de décodage ne se compose que d'un OU et de deux ET (partie droite de la figure 8).

Notons que le diagramme de Karnaugh peut également s'enrouler autour de l'axe horizontal (fig. 12).

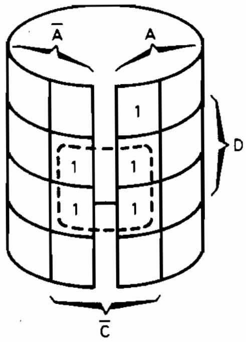


FIGURE 11. – On imagine le diagramme enroulé autour d'un cylindre vertical.

Position du compteur	A	B	C	D	X	
0	0	0	0	0	0	
$\boxed{1}$	0	0	0	1	1	→ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
2	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	1	0	
4	0	1	0	0	0	
$\boxed{5}$	0	1	0	1	1	→ $\bar{A}B\bar{C}D$
6	0	1	1	0	0	
7	0	1	1	1	0	
$\boxed{8}$	1	0	0	0	1	→ $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
$\boxed{9}$	1	0	0	1	1	→ $A\bar{B}\bar{C}D$
10	1	0	1	0	0	
11	1	0	1	1	0	
$\boxed{12}$	1	1	0	0	1	→ $AB\bar{C}\bar{D}$
$\boxed{13}$	1	1	0	1	1	→ $AB\bar{C}D$
14	1	1	1	0	0	
15	1	1	1	1	0	

FIGURE 9. Table de vérité résumant ce qui est demandé au décodeur.

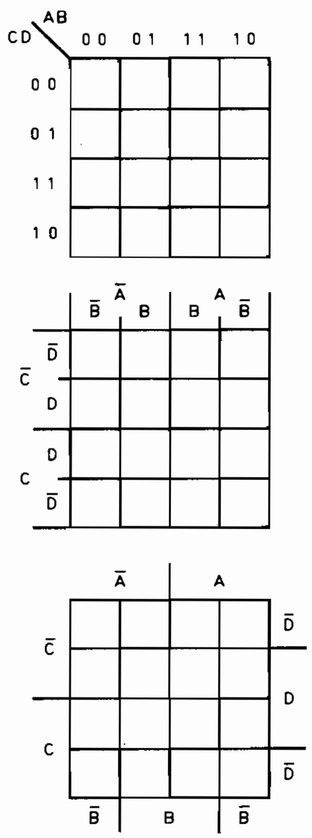


FIGURE 14. – Autres façons de représenter le diagramme de Karnaugh.

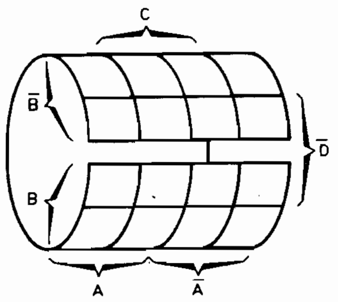


FIGURE 12. – Le diagramme peut aussi s'enrouler autour d'un axe horizontal.

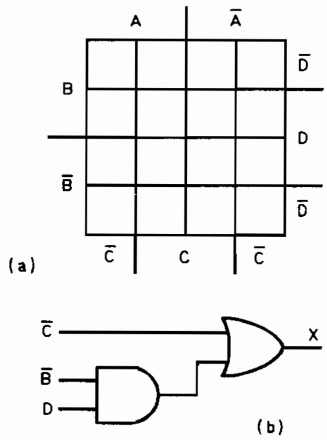


FIGURE 15. – Exercice d'application (voir texte).

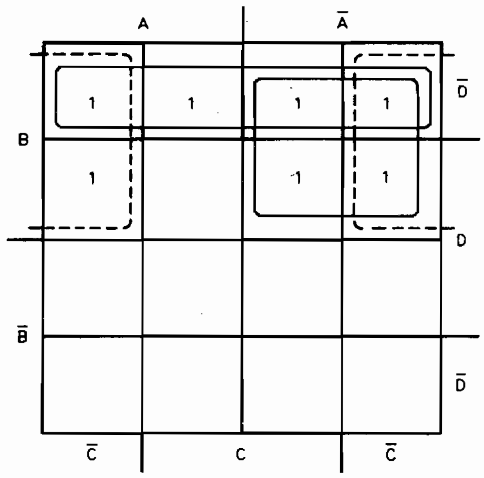


FIGURE 13. – Autre exemple de simplification, le résultat final est : $B . \bar{D} + B . \bar{C} + \bar{A} . B$.

Autre exemple de simplification

Afin de résumer la marche à suivre de cette méthode graphique, essayons de simplifier la fonction :
$F = AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + AB\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}B$

La première chose à faire est de dessiner le diagramme de Karnaugh. Combien faut-il de cases ? Puisque nous avons quatre variables, le nombre de ces cases est de 16 (2^4). Deuxième étape : pour chaque terme de la fonction F, nous mettons un 1 dans la case correspondante (fig. 13). Enfin, troisième étape, nous examinons le diagramme et déterminons les groupements les plus importants de carrés adjacents pouvant être inscrits par le plus petit nombre de variables. Ces groupements sont au nombre de trois. Premièrement, $B\bar{D}$ (les quatre carrés du haut). Deuxièmement, $\bar{A}B$, formé par les quatre carrés en haut à droite. Troisièmement, $B\bar{C}$, obtenu en enroulant le diagramme sur son axe vertical. Le résultat de cette simplification est :

$$F = B\bar{D} + B\bar{C} + \bar{A}B$$

Autres représentations du diagramme

Dans certains livres techniques, on rencontre parfois d'autres représentations du diagramme de Karnaugh. Nous les avons représentées sur la figure 14, et pensons que ces versions sont moins pratiques que celles dont nous venons de vous parler.

Quelques exercices pour le mois prochain

Nous vous donnerons dans le prochain numéro la solution des exercices suivants :

1) Comment représenter l'expression : $X = \bar{A} + AB\bar{C} + BC$ par le diagramme de Karnaugh ?

2) Comment simplifier l'expression : $X = \bar{A}B\bar{C}D + B\bar{C} + \bar{A}D$ par le tableau de Karnaugh ?

3) Quelle est l'équation représentée par le diagramme de Karnaugh dessiné sur la figure 15a ?

4) Comment peut-on simplifier le circuit logique représenté sur la figure 15b par la méthode de Karnaugh ?

Solution des exercices du mois dernier

Il s'agissait de réaliser avec des portes NOR la fonction :

$$X = (\overline{A} + B\,\overline{C}) \cdot D$$

Par la méthode algébrique, on utilise le théorème de De Morgan. Le terme $B \cdot \overline{C}$ peut s'écrire $\overline{\overline{B \cdot \overline{C}}}$, soit $\overline{\overline{B} + \overline{\overline{C}}}$ ou $\overline{\overline{B} + C}$, ce qui donne :

$$X = (\overline{A} + \overline{\overline{B} + C}) \cdot D$$

expression que nous allons encore transformer afin de ne faire apparaître que des « + ». Cette dernière expression s'écrit :

$$\overline{\overline{(\overline{A} + \overline{\overline{B} + C})}} \cdot D = \overline{\overline{(\overline{A} + \overline{\overline{B} + C})} + \overline{D}}$$

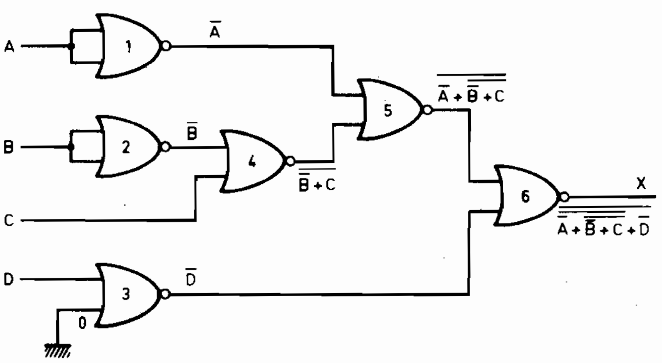


FIGURE 16. – Réalisation de la fonction $(\overline{A} + B \cdot \overline{C}) \cdot D$ avec des NOR.

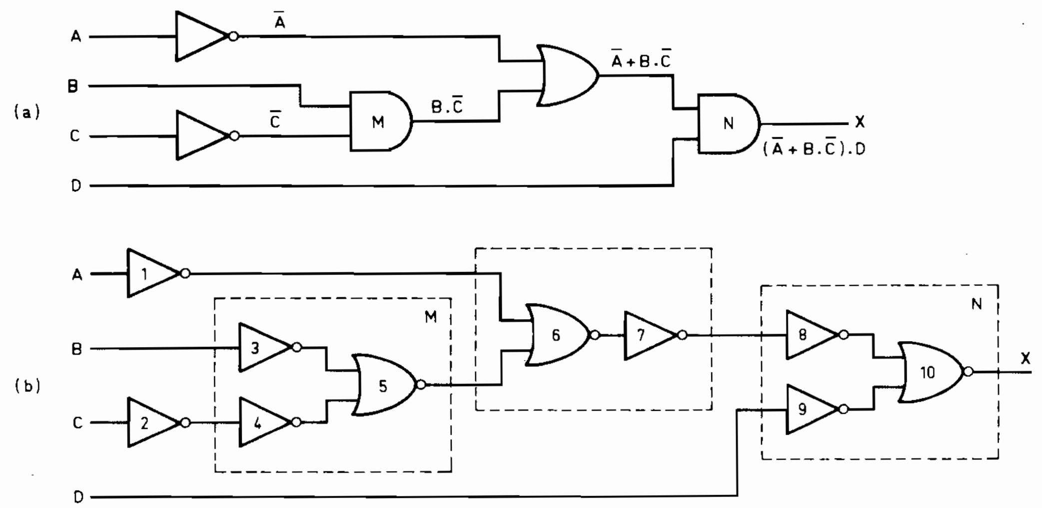


FIGURE 17. – Méthode graphique de transformation de la fonction $(\overline{A} + B \cdot \overline{C}) \cdot D$ avec des NOR.

La fonction est maintenant réalisable avec des portes NOR. La fonction inversion se fait avec des NOR à deux entrées, soit en reliant ensemble ces deux entrées (portes 1 et 2), soit en connectant l'une d'elle au zéro logique (porte 3).

Le schéma résultant est donné figure 16. Ce schéma est également trouvé par la méthode graphique. Pour cela, on dessine d'abord la fonction $X = (\overline{A} + B \cdot \overline{C}) \cdot D$ en utilisant des portes ET, OU et inverseurs (fig. 17a), puis on remplace chaque ET par un ensemble équivalent constitué de NOR, sachant que la fonction ET peut être réalisée par un NOR dont on a complémenté les entrées (ainsi les portes ET marquées M et N sur la fi-

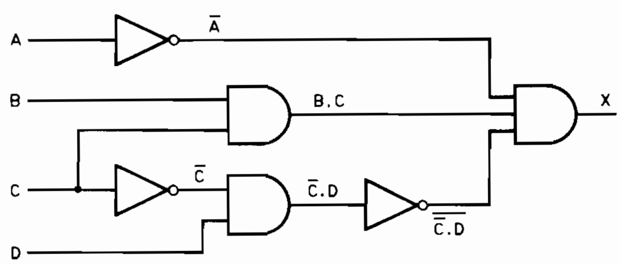


FIGURE 18. – Réalisation de la fonction $\overline{A + \overline{B \cdot C} + \overline{\overline{C} \cdot D}}$ avec des ET.

gure 17a sont respectivement remplacées, sur la figure 17b, d'une part par les portes 3, 4 et 5, et d'autre part par 6 et 7).

Egalement, l'opérateur OU donne sa place à son équivalent en NOR, c'est-à-dire par un OU suivi d'un inverseur (l'unique porte OU est remplacée par l'ensemble des opérateurs 6 et 7).

L'étape suivante consiste à remplacer par une liaison directe chaque groupe de deux inverseurs en série ; en conséquence, nous voyons disparaître les inverseurs désignés par 2, 4, 7 et 8.

Et pour n'utiliser que des NOR, les inverseurs 1, 2 et 9 sont remplacés par leur équivalent en NOR. Nous retrouvons bien ainsi le schéma obtenu par la méthode algébrique.

Quant au deuxième exercice, il s'agissait d'un problème semblable, à savoir la réalisation de la fonction : $X = \overline{A + \bar{B} . \bar{C} + \bar{C} . D}$ par des opérateurs du type ET.

Cette transformation ne pose pas de problème particulier. Nous montrons sur la figure 18 le schéma obtenu par la méthode algébrique et, sur la figure 19, deux étapes pour obtenir le même schéma par le procédé graphique.

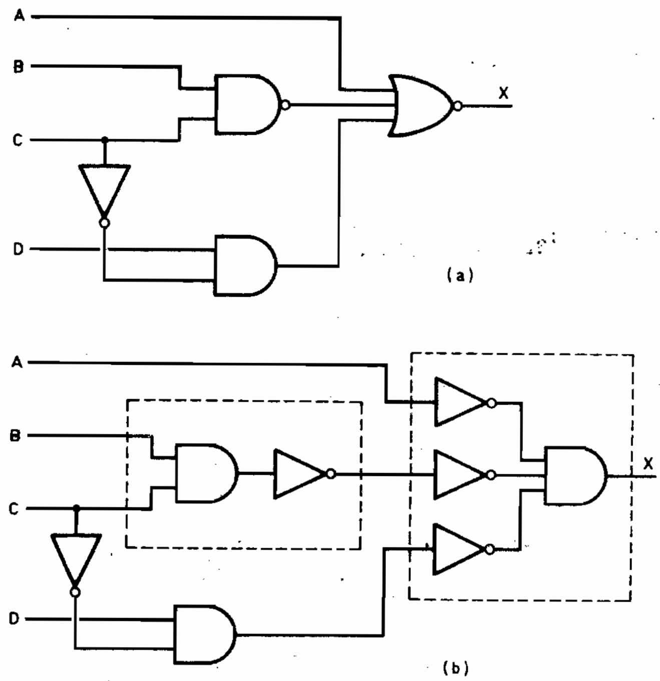


FIGURE 19. – Méthode graphique de transformation de la fonction $\overline{A + \bar{B} . \bar{C} + \bar{C} . D}$ avec des ET.

Simplification du schéma

Puisque nous avons vu comment simplifier une expression logique, nous pouvons, en guise d'application, nous attaquer à l'équation du deuxième exercice du mois dernier.

D'abord algébriquement,

$$X = \overline{A + \bar{B} . \bar{C} + \bar{C} . D}$$

devient, en appliquant les théorèmes de De Morgan :

$$X = \bar{A} . \overline{\bar{B} . \bar{C}} . \overline{\bar{C} . D}$$

soit $\bar{A} . B . C . \overline{\bar{C} . D}$, ou encore :

$$\bar{A} . B . C (\bar{\bar{C}} + \bar{D}) = \bar{A} . B . C (C + \bar{D})$$
$$= \bar{A}.B.C.C + \bar{A}.B.C.\bar{D} = \bar{A}.B.C(1 + \bar{D})$$
$$= \bar{A} . B . C$$

Procédons maintenant avec le diagramme de Karnaugh. Puisque nous avons une grande barre sur toute l'expression, nous pouvons la supprimer temporairement en considérant $\bar{X}$ ou $Y = A + \bar{B} . \bar{C} + \bar{C} . D$ et en appliquant un des théorèmes de De Morgan :

$$Y = A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{C} . D$$

(a)

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	
B	1	1		1	$\bar{D}$
B	1	1		1	D
$\bar{B}$	1	1	1	1	D
$\bar{B}$	1	1	1	1	$\bar{D}$
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$	

(b)

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	
B			1		$\bar{D}$
B			1		D
$\bar{B}$					D
$\bar{B}$					$\bar{D}$
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$	

FIGURE 20. – En (a), diagramme de Karnaugh de la fonction $Y = A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{C} . D$. En (b), diagramme de $X = \bar{Y}$.

Nous retrouverons ensuite X en interprétant, dans les cases du diagramme, les 1 comme des 0 logiques, et les carrés vides comme ayant la valeur 1. Ainsi, dans la figure 20a, nous remplissons avec des « 1 » les cases correspondant à A, $\bar{B}$, $\bar{C}$ et $\bar{C}$.D. Il reste deux carrés vides. En 20b, nous avons le diagramme de X, c'est-à-dire le complémentaire de Y, seules deux cases sont remplies. Elles correspondent bien à $X = \bar{A} . B . C$. Le schéma logique se simplifie, n'utilisant qu'un inverseur et une porte ET à trois entrées. Il n'y a aucune liaison entre D et X.

J.-B.P.